

ПРЕСМЯТАНЕ НА АРИТМЕТИЧНИ ИЗРАЗИ

Сред темите за националното външно оценяване за 7. клас са: *Естествени числа. Кратни и делители на число. Прости и съставни числа. Признаци за делимост; Рационални числа. Действия с рационални числа (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване).*

По- долу Ви представяме задачи от изпити по тези теми , проведени в периода 2010 – 2024 г., както и задачи от националните състезания – тест.

Очакваме да представите за проверка решенията на задачите за самостоятелна работа.

Година 2011/ условие	Решение/ отговор
1. Стойността на израза $25 - 95^2$ е: А) $-9\ 000$ Б) $-8\ 400$ В) $-6\ 650$ Г) $-4\ 900$	Първи начин - с директно пресмятане: $25 - 95^2 = 25 - 9025 = -9000$. Втори начин -с прилагане на формулата $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$: $25 - 95^2 = 5^2 - 95^2 = (5 - 90)(5 + 90) = -90 \cdot 100 = -9000$ Отговор: А.
2012 г.	Решение/ отговор
2. Стойността на израза $25^2 - 2 \cdot 75 \cdot 25 + 75^2$ е равна на: А) -100^2 Б) -50^2 В) $(-50)^2$ Г) $(-100)^2$	Първи начин - директно пресмятане: $25^2 - 2 \cdot 75 \cdot 25 + 75^2 = 625 - 3750 + 5625 = 2500$ Втори начин - прилагане на формулата $a^2 + 2ab + b^2 = (a - b)^2$: $25^2 - 2 \cdot 75 \cdot 25 + 75^2 = (25 - 75)^2 = (-50)^2$ Отговор: В.

2012 г.	Решение/ отговор
3. Стойността на израза $47^2 - 2.47.53 + 53^2$ е равна на: А) 6 Б) 36 В) 100 Г) 10000	Първи начин - директно пресмятане: $47^2 - 2.47.53 + 53^2 = 2209 - 4982 + 2809 = 36$ Втори начин - прилагане на формулата $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$: $47^2 - 2.47.53 + 53^2 = (47 - 53)^2 = (-6)^2 = 36$ Отговор: Б.
2013 г.	Решение/ отговор
4. Стойността на израза $15^2 - 5^2$ е равна на: А) 10 Б) 20 В) 100 Г) 200	Първи начин - с директно пресмятане: $15^2 - 5^2 = 225 - 25 = 200$ Втори начин - с прилагане на формулата $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$: $15^2 - 5^2 = (15 + 5) \cdot (15 - 5) = 20 \cdot 10 = 200$ Отговор: Г.
2015 г.	Решение/ отговор
5. Частното $50,05 : 10$ е равно на: А) 50,5 Б) 5,05 В) 500,5 Г) 5,005	Първи начин - с деление на десетични дроби: $50,05 : 10 = 5005 : 1000 = 5,005$ Втори начин – с проверка на отговорите: Ако частното е 50,05, тогава произведението на посочения възможен отговор и 10 трябва да е 50,05. $50,5 \cdot 10 = 505 \neq 50,05$; $5,05 \cdot 10 = 50,5 \neq 50,05$; $500,5 \cdot 10 = 5005 \neq 50,05; 5,005 \cdot 10 = 50,05.$ Отговор: Г.

2015 г.	Решение/ отговор
6. Стойността на израза $530.5 - 5.30$ е: А) 0 Б) 500 В) 2500 Г) 2650	Първи начин - с директно пресмятане: $530.5 - 5.30 = 2650 - 150 = 2500$ Втори начин - с прилагане на разлагането $ac - cb = c(a - b)$: $530.5 - 5.30 = 5 \cdot (530 - 30) = 5 \cdot 500 = 2500$ Отговор: В.
2016 г.	Решение/ отговор
7. Разликата $25.25 - 5.5$ е равна на произведението: А) 25.20.5 Б) 25.25.25 В) 20.20 Г) 20.30	Първи начин - с директно пресмятане: $25.25 - 5.5 = 600 = 20.30$ Втори начин - прилагане на формулата $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$: $25.25 - 5.5 = 25^2 - 5^2 = (25 + 5) \cdot (25 - 5) = 20.30$ Отговор: Г.
2017 г.	Решение/ отговор
8. Пресметнете стойността на всеки от изразите $A = \frac{4^3 - 7^3}{49 + 7.4 + 16}$ и $B = 2.1,5 - 1,5.5$ и сравнете получените числа.	$A = \frac{4^3 - 7^3}{49 + 7.4 + 16} = \begin{cases} \frac{(4-7) \cdot (7^2 + 7.4 + 4^2)}{49 + 7.4 + 16} = 4 - 7 = -3 \\ \frac{64 - 343}{49 + 28 + 16} = -\frac{279}{93} = -3 \end{cases}.$ $B = 2.1,5 - 1,5.5 = 3 - 7,5 = -4,5$ Отговор: $A = -3, B = -4,5, A > B$.
2020 г.	Решение/ отговор
9. Стойността на израза $200 - 20 \cdot (-2\frac{1}{2})$ е: А) - 450 Б) - 72 В) 208 Г) 250	$200 - 20 \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) = 200 - 20 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 200 + 50 = 250$ Отговор: Г.

2020 г.	Решение/ отговор
10. Числото 5,08 е равно на числото: А) $5\frac{4}{5}$ Б) $5\frac{2}{25}$ В) $5\frac{1}{125}$ Г) $\frac{508}{1000}$	$5,08 = \frac{508}{100} = 5\frac{8}{100} = 5\frac{2}{25}$ Отговор: Б.
2021 г.	Решение/ отговор
11. Стойността на израза $2021 - 2020 \cdot (-0,1)$ е: А) $-0,1$ Б) 1 В) 2223 Г) 2219	$2021 - 2020 \cdot (-0,1) = 2021 + 202 = 2223$ Отговор: В.
2021 г.	Решение/ отговор
12. Стойността на израза $M = -4 \cdot 3 - 8 - 2 \cdot 5 - 4$ е: А) 22 Б) 18 В) -18 Г) -22	$M = -4 \cdot 3 - 8 - 2 \cdot 5 - 4 = -4 \cdot -5 - 2 \cdot 1 = -4 \cdot 5 - 2 = -20 - 2 = -22$ Отговор: Г.
2022 г.	Решение/ отговор
13. Стойността на израза $-20,5 + 0,5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$ е А) $-20,6$ Б) $-20,4$ В) -4 Г) 4	$-20,5 + 0,5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -20,5 - 0,1 = -20,6$ Отговор: А.
2023 г.	Решение/ отговор
14. Стойността на израза $(12 \cdot 32 - 32) \cdot \frac{2}{11}$ е А) 0 Б) 2 В) 16 Г) 64	$(12 \cdot 32 - 32) \cdot \frac{2}{11} = 32 \cdot (12 - 1) \cdot \frac{2}{11} = 32 \cdot 11 \cdot \frac{2}{11} = 64$ Отговор: Г.

2023 г.	Решение/ отговор
15. Стойността на израза $0,99^2 - 0,01^2$ е А) 1 Б) 0,98 В) $0,98^2$ Г) 0,1	Първи начин- с директно пресмятане: $0,99^2 - 0,01^2 = 0,9801 - 0,0001 = 0,98$ Втори начин - с прилагане на формулата $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$: $0,99^2 - 0,01^2 = (0,99 - 0,01) \cdot (0,99 + 0,01) = 0,98 \cdot 1 = 0,98$ Отговор: Б.
2024 г.	Решение/ отговор
16. Стойността на израза $2012^2 - 2000 \cdot 1012 + 1000^2$ е А) 0 Б) 12 В) 12^2 Г) 2012^2	С прилагане на формулата $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ получаваме: Забелязваме, че $2000 = 2 \cdot 1000$. Така последователно получаваме: $2012^2 - 2000 \cdot 1012 + 1000^2 = 2012^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1012 + 1000^2 =$ $= (2012 - 1000)^2 = 1012^2$ Отговор: Б.

Тук ще припомним и задача от 2011 г.

17. Стойността на израза $2011^3 - 3 \cdot 2011^2 \cdot 2010 + 3 \cdot 2011 \cdot 2010^2 - 2010^3 + 10$ е:

А) 1 Б) 10 В) 11 Г) 13

Решението на задачата е трудно, ако прибегнем към директно пресмятане.

Идва на помощ формулата $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, прочетена от дясно наляво: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

Тогава $2011^3 - 3 \cdot 2011^2 \cdot 2010 + 3 \cdot 2011 \cdot 2010^2 - 2010^3 + 10 = (2011 - 2010)^3 + 10 = 1^3 + 10 = 11$. **Отговор: В.**

ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛЕНИ СТОЙНОСТИ НА АЛГЕБРИЧНИ ИЗРАЗИ

Задачите, които предлагаме, са от НВО през периода 2010 – 2022 г. През 2023 г. и 2024 г. в тестовите нямаше такава задача.

Прави впечатление, че в повечето задачи пресмятането на стойността на израза е за отрицателно число.

година 2010/условие	Решение/ отговор
18. Ако $a = -3$, то стойността на израза $a(a - 1) - (a - 2)$ е равна на: А) 17 Б) 13 В) 5 Г) 1	Първи начин: $a(a - 1) - (a - 2) \Rightarrow$ $(-3)(-3 - 1) - (-3 - 2) = 12 + 5 = 17$ Втори начин: $a(a - 1) - (a - 2) \Rightarrow a^2 - a - a + 2 =$ $= a^2 - 2a + 2 \Rightarrow (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 2 = 9 + 6 + 2 = 17$ Трети начин: $a(a - 1) - (a - 2) \Rightarrow$ $a^2 - a - a + 2 = a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1$ $\Rightarrow (-3 - 1)^2 + 1 = (-4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ Отговор: А.
2012 г.	Решение/ отговор
19. Стойността на израза $3 - (2,5 - a)$ при $a = -1,5$ е: А) 7 Б) 4 В) 2 Г) -1	Първи начин- със заместване и пресмятане: $3 - (2,5 - a) \Rightarrow 3 - (2,5 - (-1,5)) = 3 - (2,5 + 1,5) = 3 - 4 = -1$ Втори начин- първо опростяваме израза и след това заместваме: $3 - (2,5 - a) \Rightarrow 3 - 2,5 + a = 0,5 + a \Rightarrow 0,5 - 1,5 = -1$ Отговор: Г.

2012 г.	Решение/ отговор
20. Стойността на израза $15 - (8 + b)$ при $b = -9$ е: А) -15 Б) -2 В) 14 Г) 16	Първи начин: $15 - (8 + b) \Rightarrow 15 - (8 - 9) = 15 - (-1) = 15 + 1 = 16.$ Втори начин: $15 - (8 + b) = 15 - 8 - b = 7 - b \Rightarrow 7 - (-9) = 7 + 9 = 16$ Отговор: Г.
2013 г.	Решение/ отговор
21. Стойността на израза $12 - (2,5 - b)$ при $b = -2,5$ е: А) 7 Б) 8 В) 12 Г) 17	Първи начин: $12 - (2,5 - b) \Rightarrow 12 - (2,5 - (-2,5)) = 12 - 5 = 7$ Втори начин: $12 - (2,5 - b) = 12 - 2,5 + b = 9,5 + b \Rightarrow 9,5 + (-2,5) = 7$ Отговор: А.
2013 г.	Решение/ отговор
22. Ако $3 + k = 4$, то стойността на $k^2 + 6k + 9$ е: А) 8 Б) 12 В) 16 Г) 17	Първи начин: $3 + k = 4 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \left \begin{array}{l} k = 1 \\ k^2 + 6k + 9 \end{array} \right. \Rightarrow 1^2 + 6 \cdot 1 + 9 = 16.$ Втори начин: $\left \begin{array}{l} 3 + k = 4 \\ k^2 + 6k + 9 = (3 + k)^2 \end{array} \right. \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 4^2 = 16.$ Отговор: В.
2014 г.	Решение/ отговор
23. Стойността на израза $12 - (6 + m)$ при $m = -12$ е: А) 18 Б) 6 В) -6 Г) -18	Първи начин: $12 - (6 + m) \Rightarrow 12 - (6 - (-12)) = 12 + 6 = 18.$ Втори начин: $12 - (6 + m) = 12 - 6 - m = 6 - m \Rightarrow 6 - (-12) = 18.$ Отговор: А.

2017 г.	Решение/ отговор
24. Коя е стойността на израза $2(3 - c) - c(c - 2)$ при $c = -3$? А) -15 Б) -3 В) 9 Г) 15	Първи начин: $2(3 - c) - c(c - 2) \Rightarrow 2(3 - (-3)) - (-3)((-3) - 2) = 2 \cdot 6 - 15 = -3$ Втори начин: $2(3 - c) - c(c - 2) = 6 - 2c - c^2 + 2c = 6 - c^2 \Rightarrow 6 - 9 = -3$ Отговор: Б.
2018 г.	Решение/ отговор
25. Коя е стойността на израза $(-0,5 - x)^2$ при $x = -\frac{1}{2}$? А) $-\frac{1}{16}$ Б) 0 В) $\frac{1}{16}$ Г) $\frac{1}{8}$	По-удачно е да се замести, без да се степенува предварително: $(-0,5 - x)^2 = \left(-0,5 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = (-0,5 + 0,5)^2 = 0.$ Задачата може да бъде решена и така $(-0,5 - x)^2 = (0,5 + x)^2 = (0,5)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot x + x^2 = 0,25 + x + x^2$ $0,25 + x + x^2 \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} 0,25 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.$ Отговор: Б.
2018 г.	Решение/ отговор
26. А) Разложете на множители израза $A = x^2y - 16y$. Б) Пресметнете стойността на израза A, ако $x = 8$ и $y = 2, 5$.	А) $A = x^2y - 16y = y \cdot (x^2 - 16) = y \cdot (x - 4) \cdot (x + 4)$. Б) Заместяваме x и y съответно с 8 и $2,5$ в полученото $A = y \cdot (x - 4) \cdot (x + 4). \text{ Получаваме } A = 2,5 \cdot (8 - 4) \cdot (8 + 4) = 120.$ Можем и да пресметнем стойността на A и с директно заместване $A = x^2y - 16y \Rightarrow = 8^2 \cdot 2,5 - 16 \cdot 2,5 = 64 \cdot 2,5 - 16 \cdot 2,5 = 160 - 40 = 120.$ Отговори: $y(x - 4)(x + 4)$; 120.

2019 г.	Решение/ отговор
27. Стойността на израза $2y - 4y^2$ за $y = -0,5$ е: А) -4 Б) -2 В) 0 Г) 2	Първи начин – с директно пресмятане: $2y - 4y^2 = 2 \cdot (-0,5) - 4 \cdot (-0,5)^2 = -1 - 4 \cdot 0,25 = -1 - 1 = -2$ Втори начин: Разгагаме на множители и в полученото разлагане да се замести y с $-0,5$ и тогава да се пресмята: $2y - 4y^2 = 2y(1 - 2y) \Rightarrow 2 \cdot (-0,5)(1 - 2 \cdot 0,5) = 2 \cdot (-0,5) \cdot 0 = 0$ Отговор: В.
2022 г.	Решение/ отговор
28. Стойността на израза $a^2 - b^2$ при $a = 10,5$ и $b = 9,5$ е: А) $18,5$ Б) 19 В) $19,5$ Г) 20	Първи начин – с директно пресмятане: $10,5^2 - 9,5^2 = 110,25 - 90,25 = 20$. Втори начин – с прилагане на формулата $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$: $10,5^2 - 9,5^2 = (10,5 + 9,5)(10,5 - 9,5) = 20 \cdot 1 = 20$ Отговор: Г.

КОЕ Е ВЯРНОТО?

На два от изпитите от НВО, през 2014 г. и 2019 г., са давани задачи с въпрос „Кое е вярно?“.

Това предполага разглеждането на всички отговори. Не забравяме, че сред тях точно един е верен.

Година 2014/условие	Решение/ отговор
29. Кое числово равенство е вярно? А) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1+1}{3+5}$ Б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3+5}$ В) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1+1}{3.5}$ Г) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{3.5}$	$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}_{15} = \frac{5}{3.5} + \frac{3}{3.5} = \frac{5+3}{3.5}.$ Отговор: Г.
2019	Решение/ отговор
30. Кое от дадените равенства е вярно? А) $\frac{2}{7} = \frac{3}{6}$ Б) $\frac{1,2}{60} = \frac{0,1}{5}$ В) $\frac{3}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ Г) $-5 : (-3) = 10 : (-6)$	А) $2.6 \neq 7.3 \Rightarrow \frac{2}{7} \neq \frac{3}{6}$ Б) $1,2.5 = 60.0,1 \Rightarrow \frac{1,2}{60} = \frac{0,1}{5}$ Тук можем да спрем с проверката на отговорите, защото сред посочените само един е верен. Отговор: Б.

ПРЕСМЯТАНЕ НА СРЕДНА СКОРОСТ ПО ФОРМУЛА

През 2012 г. бе дадена следната задача:

31 Автомобил се движи 3 часа със скорост x km/h и още 5 часа със скорост y km/h. Средната му скорост V се изчислява с формулата

$$V = \frac{1}{8}(3x + 5y)$$

Колко е средната му скорост, ако се движи 3 часа със скорост 90 km/h и 5 часа със скорост 66 km/h?

А) 81 km/h Б) 78 km/h В) 75 km/h Г) 70 km/h

Решение:

Задачата може да бъде решена като се пресметне стойността на израза за конкретно дадените стойности на x и y .

Ето как:

$$\left| \begin{array}{l} V = \frac{1}{8}(3x + 5y) \\ x = 90 \\ y = 66 \end{array} \right. \Rightarrow V = \frac{1}{8}(3 \cdot 90 + 5 \cdot 66) = \frac{600}{8} = 75$$

На задачата може да се „погледне“ и като задача от движение и се реши с попълване на таблица, без да отчитаме формулата

$$V = \frac{1}{8}(3x + 5y)$$

Ето как:

	s	t	v
AB	270	3	90
BC	330	5	66
AC	600	8	$\Rightarrow V = \frac{s}{t} = 600:8 = 75$

Отговор: В.

НЯКОЛКО СТРАННИ, НО ИНТЕРЕСНИ ЗАДАЧИ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ

2012 г.	Решение/ отговор
32. Ако $x + y = 5$, колко е стойността на израза $x^2 + 2xy + y^2 - 9$?	$x^2 + 2xy + y^2 - 9 = (x + y)^2 - 9 \Rightarrow 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$ Отговор: 16.
33. Ако $a - b = 3$ и $ab = 10$, колко е стойността на израза $a^2 + b^2$?	$\underbrace{(a - b)^2}_{3^2} = a^2 + b^2 - 2 \underbrace{ab}_{10}$ $9 = a^2 + b^2 - 20 \Rightarrow 29 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 29.$ Отговор: 29.
2017 г.	Решение/ отговор
34. А) Изразете $a^2 + b^2$ чрез $a - b$ и $a \cdot b$. Б) Намерете стойността на израза $a^2 + b^2$, ако $a - b = -3$ и $ab = 10$.	А) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ Б) $a^2 + b^2 = (-3)^2 + 2 \cdot 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 29.$ Отговори: $(a - b)^2 + 2ab$; 29.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА по тема № 1

1. (от изпита след 7. клас, 2009) Числото 5,35 е равно на:

A) $\frac{535}{10}$ Б) $53\frac{1}{2}$ В) $53\frac{7}{2}$ Г) $5\frac{7}{20}$

2. (от изпита след 7. клас, 2009) Стойността на израза $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{3}{9} + \frac{4}{12}$ е равна на:

A) $\frac{4}{3}$ Б) $\frac{10}{36}$ В) $\frac{10}{3}$ Г) 3

3. (от изпита след 7. клас, 2007) Стойността на израза $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} - \frac{5}{7} : \frac{3}{7}$ е равна на:

A) $\frac{14}{15}$ Б) $-1\frac{4}{15}$ В) $-1\frac{8}{21}$ Г) $2\frac{1}{7}$

4. (от изпита след 7. клас, 2008) Стойността на израза $1\frac{1}{5} \cdot 25 - \frac{3}{5}$ е равна на:

A) $-3\frac{2}{5}$ Б) 21 В) $25\frac{1}{5}$ Г) $29\frac{2}{5}$

5. (от изпита след 7. клас, 2008) Стойността на израза $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{19}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{20}\right)$

е равна на: A) 1 Б) $\frac{20}{21}$ В) 0,7 Г) 0,15

6. (от изпита след 7. клас, 2007) При $x = 5\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)$ стойността на израза $\left(5\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{15} + \frac{3}{5}\right)\right) : x$ е:

A) 4 Б) $\frac{48}{75}$ В) $\frac{11}{15}$ Г) $1\frac{3}{5}$

7. (от изпита след 7. клас, 2009) Пресметнете стойността на израза $9y - 100y^3$ при $y = 0,3$.

A) -91 Б) 2,7 В) 0 Г) 2,43

8. (от изпита след 7. клас, 2009) Кое от посочените неравенства НЕ е вярно?

A) $(-5)^4 - 5 \cdot 5^2 > 0$ Б) $|-3| \cdot |-9| > 0$ В) $-5^4 + 5 \cdot 5^2 > 0$ Г) $-5 \cdot |-7| < 0$

ЗАДАЧИ С ПОВИШЕНА ТРУДНОСТ**РЕШИ ПО-ОБЩАТА ЗАДАЧА**

През 2009 г. на националния кръг на състезанието - тест за 7. клас бе дадена следната

Задача 1. Пресметнете $20092009.20082009 - 20082008.20092008$.

А) 40174017 Б) 40175017 В) 50175017 Г) 50174017

През 2011 г. на националното външно оценяване за 7. клас бе дадена

Задача 2. Стойността на израза $2011^3 - 3.2011^2.2010 + 3.2011.2010^2 - 2010^3 + 10$ е:

А) 1 Б) 10 В) 11 Г) 13

И двете задачи можем да решим с аритметични пресмятания:

Задача 1. можем да решим с пресмятания така:

$$20092009.20082009 - 20082008.20092008 = 403487905566081 - 403487865392064 = 40174017.$$

По същия начин решаваме и Задача 2.:

$$2011^3 - 3.2011^2.2010 + 3.2011.2010^2 - 2010^3 + 10 = 8132727331 - 24386049630 + 24373923300 - 812060100 + 10 = 11.$$

И при двете решения пресмятанията не само отнемат от определеното за решаване време, но се създават и предпоставки за техническа/и грешка/и.

Затова наблюдаваме и както в поговорката „Седем пъти мери, един път режи“, откриваме ... по –убедителни начини

Решение на задача 1.

$$\text{Нека } x = 20092009, y = 20082008. \text{ Тогава } 20092009.20082009 - 20082008.20092008 = x(y + 1) - y(x - 1) = x + y = 40174017.$$

Решение на задача 2.:

$$\text{Изразът } 2011^3 - 3.2011^2.2010 + 3.2011.2010^2 - 2010^3 + 10 \text{ може да запишем така } a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3 + 10 = (a - b)^3 + 10.$$

$$\text{Тогава } 2011^3 - 3.2011^2.2010 + 3.2011.2010^2 - 2010^3 + 10 = (2011 - 2010)^3 + 10 = 1^3 + 10 = 11.$$

По-долу ще разгледаме аритметични задачи, които се свеждат до по-общата опростяване на многочлени.

И тук е нужна наблюдателност и ... изобретателност.

Да разгледаме и да разсъждаваме върху следната

Задача 3. Пресметнете $2\frac{1}{13} \cdot 2\frac{18}{19} + 1\frac{2}{13} \cdot 2\frac{1}{19} + \frac{12}{13} \cdot 7\frac{1}{19}$.

Коментар: Обикновено такива изрази се пресмятат като:

- превърнем смесените дроби в неправилни
- след това, ако се налага, ги привеждаме под общ знаменател;
- извършваме аритметичните действия на дроби с равни знаменатели.

В случая: $2\frac{1}{13} \cdot 2\frac{18}{19} + 1\frac{2}{13} \cdot 2\frac{1}{19} + \frac{12}{13} \cdot 7\frac{1}{19} = \frac{27}{13} \cdot \frac{56}{19} + \frac{15}{13} \cdot \frac{39}{19} + \frac{12}{13} \cdot \frac{134}{19} = \frac{1512}{247} + \frac{585}{247} + \frac{1608}{247} = \frac{3705}{247} = 15$

Задачата може да се реши и като се сведе до по-общата, а именно:

$a = \dots$ $b = \dots$	Изразът е	Пресмятаме със стойностите на a и b
$a = \frac{1}{13}$ $b = \frac{1}{19}$	$(2+a)(2+18b) + (1+2a)(2+b) + 12a(7+b) =$ $= 4 + 36b + 2a + 18ab + 2 + b + 4a + 2ab + 84a + 12ab =$ $= 6 + 90a + 37b + 32ab$	$6 + \frac{90}{13} + \frac{37}{19} + \frac{32}{247}$ $6 + \frac{1710 + 481 + 32}{247}$ $6 + 9 = 15$
$a = \frac{1}{13}$ $b = \frac{1}{19}$	Може и с леко подобрение. Ето как: $(2+a)(3-b) + (1+2a)(2+b) + (1-a)(7+b) =$ $= 6 - 2b + 3a + 2 + b + 4a + 2ab + 7 + b - 7a - ab = 15$	15

Извод:

Можем да сведем конкретен израз към по-общ, но за да опростим пресмятанията трябва вложим и известна изобретателност.

Надяваме се, че с решението на трите предложени по-горе задачи покажем изобретателност.

Продължаваме със

Задача 4. Докажете, че $1234 \frac{1}{34} \cdot 34 \frac{1}{234} \cdot 234 \frac{1}{1234} = 1234 \frac{1}{34} + 34 \frac{1}{234} + 234 \frac{1}{1234} + \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{234} \cdot \frac{1}{1234} + 34 \cdot 234 \cdot 1234$.

Решение: Заместваме 34, 234 и 1234 съответно с a , b и c .

Последователно получаваме:

$$\begin{aligned} A &= 1234 \frac{1}{34} \cdot 34 \frac{1}{234} \cdot 234 \frac{1}{1234} \Rightarrow \\ &c \frac{1}{a} \cdot a \frac{1}{b} \cdot b \frac{1}{c} = \frac{ca+1}{a} \cdot \frac{ab+1}{b} \cdot \frac{bc+1}{c} = \frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc} = \\ &= \frac{(ab^2c + ab + bc + 1)(ca+1)}{abc} = \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + bc + ca + a^2b^2c^2 + 1}{abc} \end{aligned}$$

$$B = 1234 \frac{1}{34} + 34 \frac{1}{234} + 234 \frac{1}{1234} + \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{234} \cdot \frac{1}{1234} + 34 \cdot 234 \cdot 1234 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c \frac{1}{a} + a \frac{1}{b} + b \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + a \cdot b \cdot c &= \frac{ca+1}{a} + \frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{1}{abc} + abc = \\ &= \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + bc + ca + a^2b^2c^2 + 1}{abc} \end{aligned}$$

От

$$A = \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + bc + ca + a^2b^2c^2 + 1}{abc}$$

и

$$B = \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + bc + ca + a^2b^2c^2 + 1}{abc}$$

$$\Rightarrow c \frac{1}{a} \cdot a \frac{1}{b} \cdot b \frac{1}{c} = c \frac{1}{a} + a \frac{1}{b} + b \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$\xrightarrow{a=34, b=234, c=1234} 1234 \frac{1}{34} \cdot 34 \frac{1}{234} \cdot 234 \frac{1}{1234} = 1234 \frac{1}{34} + 34 \frac{1}{234} + 234 \frac{1}{1234} + \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{234} \cdot \frac{1}{1234} + 34 \cdot 234 \cdot 1234.$$

Впечатляваща е и следващата

Задача 5. Докажете, че

а) (автор Ф. Бартенев) $55\,554.55\,559.55\,552 - 55\,556.55\,551.55\,55866\,665.66\,670.66\,663 - 66\,667.66\,662.66\,669$

б) (В. Произволов) всяко едно от числата е точен квадрат: $a = 1991.1993.1995.1997 + 16$, $b = 1994.1995.1996.1998.1999.2000 + 36$ и $c = 1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$.

в) (С. Токарев) числото $d = 1993.1995^3 - 1994.1992^3$ е точен куб.

Решение:

а) Нека $55\,555$ и $66\,666$ заменим съответно с x и y .

Тогава $55\,554.55\,559.55\,552 - 55\,556.55\,551.55\,558$

$$= (x-1)(x+4)(x-3) - (x+1)(x-4)(x+3) = (x-1)(x^2+x-12) - (x+1)(x^2-x-12) = 24;$$

$$66\,665.66\,670.66\,663 - 66\,667.66\,662.66\,669 = (y-1)(y+4)(y-3) - (y+1)(y-4)(y+3) = 24.$$

Тогава

$$55\,554.55\,559.55\,552 - 55\,556.55\,551.55\,558 = 24 = 66\,665.66\,670.66\,663 - 66\,667.66\,662.66\,669$$

$$\text{б) } x = 1994 \Rightarrow a = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 = (x^2-1)(x^2-9) + 16 = x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2-5)^2$$

$$\Rightarrow a = 1991.1993.1995.1997 + 16 = (1994^2 - 5)^2.$$

$$y = 1997 \Rightarrow (y-3)(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)(y+3) + 36 = (y^2-1)(y^2-4)(y^2-9) + 36 = y^6 - 14y^4 + 49y^2 = \\ = y^2(y^4 - 14y^2 + 49) = (y(y^2 - 7))^2.$$

$$b = 1994.1995.1996.1998.1999.2000 + 36 = (1997(1997^2 - 7))^2.$$

$$z = 1995 \Rightarrow c = 1994^2 + 1994^2.1995^2 + 1995^2 = (z-1)^2 + (z-1)^2.z^2 + z^2 = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = (z^2 - z + 1)^2 \\ \Rightarrow c = 1994^2 + 1994^2.1995^2 + 1995^2 = (1995^2 - 1995 + 1)^2 = (1995^2 - 1994)^2.$$

$$в) \quad t = 1993 \Rightarrow d = t(t+2)^3 - (t+1)(t-1)^3 = (2t+1)^3 \Rightarrow d = 1993.1995^3 - 1994.1992^3 = (2.1993 + 1)^3 = 3986^3$$

Задача за самостоятелна работа

Задача 5. Пресметнете

а)

$$2\frac{1}{11} \cdot 2\frac{2}{13} + 1\frac{2}{11} \cdot 2\frac{1}{13} - 1\frac{1}{11} \cdot 6\frac{4}{13}$$

б)

$$3\frac{1}{17} \cdot 4\frac{2}{19} - 1\frac{16}{17} \cdot 5\frac{18}{19} - \frac{5}{19}$$

в)

$$\frac{2021}{202120212021^2 - 202120212020.202120212022}$$

ЗАПОМНЯЩИ СЕ ЗАДАЧИ ОТ НАЦИОНАЛНИТЕ СЪСТЕЗАНИЯ – ТЕСТ ЗА СЕДМИ КЛАС

Задача 6. (2010) Ако a , b и c са три различни числа да положим

$$A = (2010 - a)(2010 - b) + (2010 - a)(2010 - c) + (2010 - b)(2010 - c),$$

$$B = \left(2010 - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{c+a}{2}\right)^2$$

и

$$C = 3 \left(2010 - \frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

посочете вярната зависимост между A , B и C .

A) $C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ Б) $C = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$ В) $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ Г) $C = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B$

Решение:

Ако $x = 2010 - a$, $y = 2010 - b$, $z = 2010 - c$. Тогава $A = xy + yz + zx$,

$$4B = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2, C = \frac{1}{3}(x + y + z)^2.$$

$$\text{От } C = \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \Rightarrow 3C = C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + 2A \text{ и } 4B = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2A,$$

$$\text{получаваме } 3C - 2A = 2B - A \Rightarrow C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B.$$

С това задачата на практика е решена.

На електронната страница на Министерството на образованието и науката в решението на тази задача авторите ѝ доказват още, че останалите зависимости не са изпълнени.

Наистина, ако допуснем, че и някоя от останалите зависимости е също изпълнена ще следва равенството

$$A = B \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z \Rightarrow a = b = c. \text{ По условие обаче числата са различни.}$$

Задача 7. (2011) Посочете равенството, което НЕ Е тъждество.

$$A) a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2}$$

$$B) (a^2 - 4a + 16)(a + 4)(-4 + a)(a^2 + 4a + 16) = a^6 - 2^{12}$$

$$B) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)$$

$$Г) ((a + b + 2c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = (a + c)^4 + (b + c)^4$$

Решение:

В авторовото решение е посочено, че равенството B) е нарушено например при $a = 2, b = c = 1$.

Това е бързия начин за достигане до верния отговор.

Ето как се доказва кои равенства са тъждества. Това не се изисква, защото само трябва да се посочи кое от равенствата не е тъждество.

Заради интересните преобразования ще анализираме всеки един от посочените отговори.

$$A) a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2) + (b^2 - 2bc + c^2)}{2} = \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc. \end{aligned}$$

Посоченото в A) равенство е тъждество.

Продължаваме с

$$B) (a^2 - 4a + 16)(a + 4)(-4 + a)(a^2 + 4a + 16) = a^6 - 2^{12}$$

Преобразуваме лявата страна

$$\begin{aligned} (a^2 - 4a + 16)(a + 4)(-4 + a)(a^2 + 4a + 16) &= (a^2 - 4a + 16)(a^2 + 4a + 16)(a + 4)(-4 + a) = (a^2 + 16 - 4a)(a^2 + 16 + 4a)(a + 4)(a - 4) = \\ &= ((a^2 + 16)^2 - (4a)^2)(a^2 - 4^2) = (a^4 + 32a^2 + 16^2 - 16a^2)(a^2 - 4^2) = (a^4 + 16a^2 + 16^2)(a^2 - 16) = \dots \end{aligned}$$

Тук трябва да видим, че ако $x = a^2$ и $y = 16$, тогава

$$(a^4 + 16a^2 + 16^2)(a^2 - 16) \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \Rightarrow (a^2)^3 - 16^3 = a^6 - (2^4)^3 = a^6 - 2^{12}.$$

Посоченото в Б) равенство е тъждество.

$$В) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)$$

Преобразуваме дясната страна

$$(a + b + c)(a - b - c)(a + b - c) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b - c) = ((a + b)^2 - c^2)(a - b - c) = (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(a - b - c)$$

Тук се очертава „дълъг“ израз след разкриване на скобите. Но.... можем да облекчим пресмятанията.

Наблюдаваме: В лявата страна на равенството има $+b^3$, а в дясната е $-b^3$.

Тук коефициентът пред третата степен на b се получава от $+b^2 \cdot (-b) = -b^3$

Равенството В) НЕ Е тъждество.

И сега от чисто любопитство доказваме, че

$$Г) ((a + b + 2c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = (a + c)^4 + (b + c)^4 \text{ е тъждество.}$$

Ще преобразуваме лявата страна

$$((a + b + 2c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2$$

като представим $a + b + 2c$ като $a + c + b + c$ и тогава

$$(a + b + 2c)^2 = (a + c + b + c)^2 = (a + c)^2 + 2(a + c)(b + c) + (b + c)^2.$$

Последователно записваме

$$\begin{aligned} & ((a + b + 2c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = ((a + b + 2c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = \\ & = ((a + c + b + c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = ((a + c)^2 + 2(a + c)(b + c) + (b + c)^2 - 2(a + c)(b + c))^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = \\ & = ((a + c)^2 + (b + c)^2)^2 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = (a + c)^4 + 2(a + c)^2(b + c)^2 + (b + c)^4 - 2(a + c)^2(b + c)^2 = (a + c)^4 + (b + c)^4. \end{aligned}$$

Посоченото в Г) равенство е тъждество.

Нека по подобие на решението на тази задача да се върнем към задачата от 2010:

$$\begin{aligned} A &= (2010 - a)(2010 - b) + (2010 - a)(2010 - c) + (2010 - b)(2010 - c), \\ B &= \left(2010 - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{c+a}{2}\right)^2, \\ C &= 3 \left(2010 - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Търсим такива стойности на a , b и c , при които едно от посочените равенства не е изпълнено.

Ако $a = 2009, b = 2011, c = 2013$, тогава $A = -1 - 3 + 3 = -1, B = 0 + 4 + 1 = 5, C = 3 \cdot 1 = 3$

Посочете вярната зависимост между A , B и C .

A) $C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \Rightarrow 3 = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3}$

B) $C = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B \Rightarrow 3 \neq -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$

B) $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \Rightarrow 3 \neq -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$

Г) $C = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B \Rightarrow 3 \neq -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}$

Всичко е ясно.

Задача 8. (2010) Да се намери най-големият прост делител на сумата от различните прости делители на изрази $2010^4 + 2009 \cdot 2010^2 - 2010$.

Решение: Нека $a = 2010$. Тогава

$$a^4 + (a - 1) \cdot a^2 - a = a^4 + a^3 - a^2 - a = a(a^3 + a^2 - a - 1) = a(a^2(a + 1) - (a + 1)) = a(a + 1)(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)(a + 1).$$

Получаваме, че $2010^4 + 2009 \cdot 2010^2 - 2010 = 2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2011$.

Отбелязваме, че $2009 = 7^2 \cdot 41$, $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ и 2011 е просто число. Тогава сборът от различните прости делители на изрази е

$$7 + 41 + 2 + 3 + 5 + 67 + 2011 = 2136 = 2^3 \cdot 3 \cdot 89.$$

Отговор на поставената задача е числото 89.